23.03.23
Nicolas Wehrli

AnW – Woche 5

Heute:

I. Kurze Kommentare zum Peergrading
II. Theory Recap
- Bemerkungen und Konventionen
- Bedingte Wahrscheinlichkeit (Bayes)
- Unabhängigkeit
- Zufallsvariablen
- Erwartungswert
- Indikatorvariablen
- Bernoulliverteilung, Binomialverteilung
- Geometrische Verteilung

III. Übung
IV. Kahoot

I. Peergrading

Auch wenn die Lösung perfekt ist, könnt ihr Feedback geben!

II. Theory Recap – Wahrscheinlichkeit

Es gibt 2 Versionen der Siebformel im Skript:

Satz 1.35, der nur Aussagen über die Kardinalität einer Vereinigung $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ macht.

Satz 2.5: Aussage über die Wahrscheinlichkeitsverteilung von $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

Aus 2.5 folgt 1.35 mit einem Laplace-Modell.

(i.e. $Pr[E] = \frac{|E|}{|\Omega|}$, $\forall E \subseteq \Omega$)

Grundsätzlich ordnet $Pr[\cdot]$ jedem Ereignis eine reelle Zahl zu.

In klassischer W'keitstheorie (4. Semester), werdet ihr sehen, dass $Pr = \mathbb{P}$ eine Funktion

$\mathbb{P}: \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ ist,

wobei $\mathcal{F} \subseteq \underbrace{\mathcal{P}(\Omega)}_{\text{Powerset}}$ und 3 Bedingungen (Axiome von Kolmogorov) erfüllt. (und $\mathbb{P}$ ebenfalls gewisse Bed. erfüllt)

Für diese Vorlesung nicht weiter wichtig,
Nehmt einfach die Def. 2.1 aus dem Skript.

Nicht relevant für die Prüfung

Definition 2.1. Ein *diskreter Wahrscheinlichkeitsraum* ist bestimmt durch eine *Ergebnismenge* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ von *Elementarereignissen*. Jedem Elementarereignis ω_i ist eine *(Elementar-)Wahrscheinlichkeit* $\Pr[\omega_i]$ zugeordnet, wobei wir fordern, dass $0 \leq \Pr[\omega_i] \leq 1$ und

$$\sum_{\omega \in \Omega} \Pr[\omega] = 1.$$

Eine Menge $E \subseteq \Omega$ heisst *Ereignis*. Die Wahrscheinlichkeit $\Pr[E]$ eines Ereignisses ist definiert durch

$$\Pr[E] := \sum_{\omega \in E} \Pr[\omega].$$

Ist E ein Ereignis, so bezeichnen wir mit $\bar{E} := \Omega \setminus E$ das *Komplementärereignis* zu E.

In dieser Vorlesung ist Ω meistens endlich, sonst abzählbar unendlich. (Bei überabzählbaren Mengen treten Schwierigkeiten auf, die in dieser Vorlesung nicht behandelt werden.)

Bmk: Die vollständige (mathematische) Beschreibung eines W'keitraumes ist bei den meisten Anwendungen recht umständlich und kompliziert.

Bsp. Kartenspiel wo zwei Spieler je 5 Karten erhalten.

$$\begin{aligned} \Omega \; := \; & \{(X, Y) \mid X, Y \subseteq C,\ X \cap Y = \emptyset,\ |X| = |Y| = 5, \\ & \text{wobei } C = \{\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit\} \times \{2, 3, \ldots, 9, 10, B, D, K, A\}\}. \end{aligned}$$

Da eine solch explizite Darstellung mühsam sein kann, verzichtet man häufig darauf.
Allerdings sollte stets klar sein, wie eine solche Darstellung

im Prinzip auszusehen hätte.

Ähnlich wie bei Ω können wir auch ein Ereignis informell (aber eindeutig) definieren.

Bsp. $E :=$ „Spieler 1 hat 4 Asse"

anstatt

$$E := \{(X, Y) \in \Omega \mid X = \{(f_1, w_1), \ldots, (f_5, w_5)\} \text{ und } w_1 = \ldots = w_4 = A\}.$$

Diese informelle Schreibweise können wir auch wie folgt verwenden:

$\Pr[\underbrace{\text{„Spieler 1 hat 4 Asse"}}_{\text{Platzhalter für die Menge } E}]$

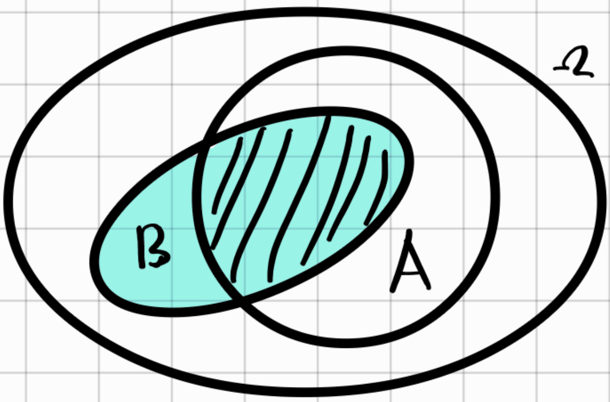
Bedingte Wahrscheinlichkeit

Intuitiv: Zusätzliche Informationen können die Wahrscheinlichkeiten verändern !

Definition 2.8. A und B seien Ereignisse mit $\Pr[B] > 0$. Die *bedingte Wahrscheinlichkeit* $\Pr[A|B]$ von A gegeben B ist definiert durch

$$\Pr[A|B] := \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]}.$$

mögliche Ereignisse eingeschränkt auf B.



~ 'Welcher Anteil davon ist auch in A?'

$\Longrightarrow \Pr[A|B]$

<u>Bmk:</u> $\Pr[B \mid B] = 1, \quad \Pr[B \mid \overline{B}] = 0$

$\Pr[A \mid \Omega] = \Pr[A]$

Häufig betrachtet man Def 2.8 in einer anderen Form:

$$\Pr[A \cap B] = \Pr[B|A] \cdot \Pr[A] = \Pr[A|B] \cdot \Pr[B]. \qquad (2.1)$$

Dann darf $\Pr[B] \geq 0$ sein. (bzw. $\Pr[A] \geq 0$)

Nun können wir dies n-mal erweitern und erhalten

Satz 2.10. *(Multiplikationssatz)* Seien die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ gegeben. Falls $\Pr[A_1 \cap \cdots \cap A_n] > 0$ ist, gilt

$$\Pr[A_1 \cap \cdots \cap A_n] = \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2|A_1] \cdot \Pr[A_3|A_1 \cap A_2] \cdots \Pr[A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}].$$

Von (2.1) können wir auch folgendes schlussfolgern.

Satz 2.13. *(Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit)* Die Ereignisse (1) $A_1, \ldots, A_n$ seien paarweise disjunkt und es gelte $B \subseteq A_1 \cup \ldots \cup A_n$. (2) Dann folgt

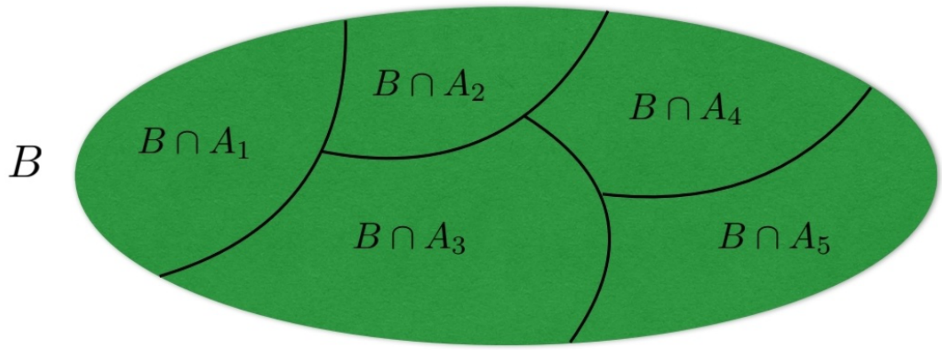
$$\Pr[B] = \sum_{i=1}^{n} \Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i].$$

(Analog gilt für paarweise disjunkte Ereignisse $A_1, A_2, \ldots$ mit $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, dass

$$\Pr[B] = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i].$$
)

Aus (1) folgt $A_1 \cap B, A_2 \cap B, \ldots, A_n \cap B$ paarweise disjunkt.

Aus (2) folgt $B = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B)$



$$\Longrightarrow \Pr[B] = \sum_{i=1}^{n} \Pr[A_i \cap B] \qquad \text{(Additionssatz)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \Pr[B | A_i] \cdot \Pr[A_i] \qquad (2.1)$$

$\boxtimes$

Zur Erinnerung:

Satz 2.3 (Additionssatz). Wenn die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ paarweise disjunkt sind (also wenn für alle Paare $i \neq j$ gilt, dass $A_i \cap A_j = \emptyset$), so gilt

$$\Pr\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \Pr[A_i].$$

(Für eine unendliche Menge von disjunkten Ereignissen $A_1, A_2, \ldots$ gilt analog

$$\Pr\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right] = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[A_i].$$
)

Aus den Satz der totalen Wahrscheinlichkeit und (2.1) folgt

Satz 2.15. *(Satz von Bayes)* Die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ seien paarweise disjunkt. Ferner sei $B \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_n$ ein Ereignis mit $\Pr[B] > 0$. Dann gilt für ein beliebiges $i = 1, \ldots, n$

$$\Pr[A_i|B] = \frac{\Pr[A_i \cap B]}{\Pr[B]} = \frac{\Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i]}{\sum_{j=1}^{n} \Pr[B|A_j] \cdot \Pr[A_j]}.$$

Analog gilt für paarweise disjunkte Ereignisse $A_1, A_2, \ldots$ mit $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, dass

$$\Pr[A_i|B] = \frac{\Pr[A_i \cap B]}{\Pr[B]} = \frac{\Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i]}{\sum_{j=1}^{\infty} \Pr[B|A_j] \cdot \Pr[A_j]}.$$

Unabhängigkeit

Wir definieren Unabhängigkeit wie folgt:

Definition 2.18. Die Ereignisse A und B heissen *unabhängig*, wenn gilt

$$\Pr[A \cap B] = \Pr[A] \cdot \Pr[B].$$

Wenn $\Pr[B] \neq 0$ können wir aus der Def. folgendes folgern

$$\Pr[A \cap B] = \Pr[A] \cdot \Pr[B]$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]}}\, = \Pr[A] \qquad (\Pr[B] \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\Pr[A|B] = \Pr[A]}$$

Diese Definition von Unabhängigkeit ist äquivalent ($\Leftrightarrow$) zu Def. 2.18, gdw. $\Pr[B] \neq 0$.

Beispielaufgabe:

Zeige: Für $0 < Pr[B] < 1$:

$$Pr[A \mid B] = Pr[A \mid \overline{B}] \iff A, B \text{ unabhängig}$$

$$\Updownarrow$$

$$\overset{Pr[A]}{}$$

$$\frac{\boxed{Pr[A \cap B]}}{\boxed{Pr[B]}} = \frac{Pr[A \cap \overline{B}]}{Pr[\overline{B}]} \rightsquigarrow Pr[A \cap B] = Pr[A]\,Pr[B]$$

$Pr[B] \neq 0$

$$Pr[A \cap B] = \frac{Pr[A \cap \overline{B}]}{1 - Pr[B]} \quad Pr[B]$$

$$Pr[A \cap B] \cdot (1 - Pr[B]) = Pr[A \cap \overline{B}] \cdot Pr[B]$$

$$Pr[A \cap B] \cdot (1 - Pr[B]) = (Pr[A] - Pr[A \cap B]) \cdot Pr[B]$$

$$Pr[A \cap B] - Pr[A \cap B]Pr[B] = Pr[A]Pr[B] - Pr[A \cap B]Pr[B]$$

$$Pr[A \cap B] = Pr[A]\,Pr[B]$$

Bsp.: Wir werfen eine faire Münze 2-mal nacheinander.

$\Omega = \{(K,K),(K,Z),(Z,K),(Z,Z)\}$

$A :=$ "1. Wurf zeigt Kopf" $(= \{(K,Z),(K,K)\})$
$B :=$ "2. Wurf zeigt Kopf" $(= \{(K,K),(Z,K)\})$

$C :=$ "Die 2 Würfe sind verschieden" $(= \{(K,Z),(Z,K)\})$

$$\Pr[A \cap B] = \Pr[\{(K,K)\}] = \underbrace{\frac{1}{4}}_{\text{Laplace Raum}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \Pr[A] \cdot \Pr[B]$$
$$\Pr[A \cap C] = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \Pr[A] \cdot \Pr[C]$$
$$\Pr[B \cap C] = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \Pr[B] \cdot \Pr[C]$$

$\Longrightarrow$ A, B sind unabhängig. B, C sind unabhängig.
A, C sind unabhängig.

Aber: A, B, C sind nicht unabhängig.
Insbesondere gilt, dass wenn 2 eintreten, das 3. Ereignis nicht eintreten kann, da $A \cap B \cap C = \emptyset$.

$$\Longrightarrow \Pr[A \cap B \cap C] = 0 \neq \frac{1}{8} = \Pr[A] \cdot \Pr[B] \cdot \Pr[C]$$

paarweise Unabhängigkeit ist nicht ausreichend.

Definition 2.22. Die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ heissen *unabhängig*, wenn für alle Teilmengen $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ gilt, dass

$$\Pr[A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}] = \Pr[A_{i_1}] \cdots \Pr[A_{i_k}]. \tag{2.2}$$

(Eine unendliche Familie von Ereignissen A_i mit $i \in \mathbb{N}$ heisst unabhängig, wenn (2.2) für jede endliche Teilmenge $I \subseteq \mathbb{N}$ erfüllt ist.)

Alle Teilmengen überprüfen / berechnen könnte man mit Bitstrings (wie bei Hamilton DP Woche 02 gezeigt)

Lemma 2.23. Die Ereignisse $A_1, \dots, A_n$ sind genau dann unabhängig, wenn für alle $(s_1, \dots, s_n) \in \{0,1\}^n$ gilt, dass

$$\Pr[A_1^{s_1} \cap \dots \cap A_n^{s_n}] = \Pr[A_1^{s_1}] \cdots \Pr[A_n^{s_n}], \tag{2.3}$$

wobei $A_i^0 = \bar{A}_i$ und $A_i^1 = A_i$.

Nützliches Lemma

Lemma 2.24. Seien A, B und C unabhängige Ereignisse. Dann sind auch $A \cap B$ und C bzw. $A \cup B$ und C unabhängig.

Beweis (siehe Skript S. 107)

Bmk: disjunkt $\not\Rightarrow$ unabhängig
unabhängig $\not\Rightarrow$ disjunkt

Zufallsvariablen

Eine Zufallsvariable X ist eine Funktion

$$X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

Wir definieren (für diskrete W'keitsräume) den Wertebereich einer Zufallsvariable:

$$W_X = \{ z \in \mathbb{R} \mid \exists \omega \in \Omega \text{ mit } X(\omega) = z \} \quad (\hat{=} X(\Omega))$$

Bildraum der Abbildung

Beispiel: Wir werfen eine faire Münze 3-mal.

Dann ist $\Omega = \{K, Z\}^3$

Die Zufallsvariable Y betrachte die Gesamtanzahl der Würfe mit Ergebnis 'K' und quadriert diese.

Beispielsweise wäre $Y(\underbrace{(K, Z, K)}_{\omega \in \Omega}) = 4$

$$Y(\underbrace{(K, K, K)}_{\omega \in \Omega}) = 9$$

Dann wäre $W_Y = \{0, 1, 4, 9\}$

Wie bei den Beschreibungen der W'keitsräume haben sich auch bei den Zufallsvariablen einige Konventionen eingebürgert.

Meistens interessieren wir uns für Ereignisse wo die Zufallsvariable einen gewissen Wert annimmt.

z. Bsp.: $E_y = \underbrace{\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = y\}}\ \left(= X^{-1}(y)\right)$

Meistens schreiben wir aber '$X = y$'. (intuitiver)

$\Longrightarrow \Pr[E_y] = \Pr[X = y]$

Analog steht '$X \leq y$' für das Ereignis $D = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq y\}$

$\Pr['X \cdot Y = z'] = \Pr[\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \cdot Y(\omega) = z\}]$

Mit dieser Notation können wir für jede Zufallsvariable zwei Funktionen definieren:

Dichte(-funktion)

$$f_X : \mathbb{R} \to [0,1], \quad x \mapsto P[X = x]$$

Verteilungs(-funktion)

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1], \quad x \mapsto \underbrace{\sum_{y \in W_X :\, y \leq x} \Pr[X = y]}_{\Pr[X \leq x]}$$

Beispielaufgabe

Wir werfen zwei faire 6-seitige Würfel.
Falls die Augenzahlen gleich sind, werfen wir eine faire Münze 4 Mal, sonst 2 Mal. Wenn die Anzahl Köpfe und Zahlen gleich ist, was ist die Wahrscheinlichkeit, dass wir die Münze 4 Mal geworfen haben?

Ereignisse sauber definieren!

Sei:

A = "Köpfe und Zahlen gleich"

B = "Augenzahl gleich" = "4 Mal Münze werfen"

Wir berechnen

$$\Pr[B \mid A] = \frac{\Pr[B \cap A]}{\Pr[A]}$$

$$\Pr[B \cap A] = \Pr[B \cap A \mid B] \cdot \Pr[B]$$

$$= \frac{\binom{4}{2}}{2^4} \cdot \frac{6}{36}$$

2 Münzwürfe Kopf von 4

6 von 36 Würfelpaaren (alle gleichwahrscheinlich)

$$= \frac{6}{2^4} \cdot \frac{1}{6} = \underline{\frac{1}{2^4}}$$

$$\Pr[A] = \Pr[A|B]\cdot\Pr[B] + \Pr[A|\overline{B}]\cdot\Pr[\overline{B}]$$ (Satz der totalen W'keit)

$$= \frac{\binom{4}{2}}{2^4}\cdot\frac{6}{36} + \frac{\binom{2}{1}}{2^2}\cdot\frac{30}{36}$$

$$= \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}$$

$$= \frac{1}{16} + \frac{5}{12}$$

$$= \frac{3+20}{48} = \underline{\frac{23}{48}}$$

$$\Pr[B|A] = \frac{\Pr[B\cap A]}{\Pr[A]} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{23}{48}} = \underline{\underline{\frac{3}{23}}}$$

Erwartungswert

Wir möchten meistens einen "Durchschnittswert" finden, den eine Zufallsvariable annimmt.

Definition 2.27. Zu einer Zufallsvariablen X definieren wir den *Erwartungswert* $\mathbb{E}[X]$ durch

$$\mathbb{E}[X] := \sum_{x \in W_X} \boxed{x} \cdot \underbrace{\Pr[X = x]}_{\text{W'keit, das } x \text{ eintritt}},$$

sofern die Summe absolut konvergiert. Ansonsten sagen wir, dass der Erwartungswert undefiniert ist.

Wir erinnern uns, dass '$X=x$' nur ein Platzhalter für die Ereignismenge

$$E_x = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$$ ist.

$$\Rightarrow \Pr[X=x] = \sum_{\omega \in E_x} \Pr[\omega]$$ per Def. von $\Pr[\cdot]$ für Mengen

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X] = \sum_{x \in W_x} \sum_{\omega \in E_x} x \cdot \Pr[\omega]$$

$$= \sum_{x \in W_x} \sum_{\omega \in E_x} X(\omega) \cdot \Pr[\omega]$$

Da $\bigcup_{x \in W_x} E_x = \Omega$ und $E_x \cap E_y = \emptyset$ für $x \neq y \in W_x$

Lemma 2.29. Ist X eine Zufallsvariable, so gilt:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot \Pr[\omega].$$

Beispiel: Für unsere ZV Y mit $\Omega = \{K, Z\}^3$ und Münzwurf fair, gilt:

$$\mathbb{E}(Y) = 0 \cdot \Pr[Y=0] + 1 \cdot \Pr[Y=1] + 4 \cdot \Pr[Y=4] + 9 \cdot \Pr[Y=9]$$

$$= 0 + 1 \cdot \Pr[\{(K,Z,Z),(Z,K,Z),(Z,Z,K)\}]$$

$$+ 4 \cdot \Pr[\{(K,K,Z),(K,Z,K),(Z,K,K)\}]$$

$$+ 9 \cdot \Pr[\{(K,K,K)\}]$$

$$= 1 \cdot \frac{3}{8} + 4 \cdot \frac{3}{8} + 9 \cdot \frac{1}{8} = \frac{24}{8} = \underline{\underline{3}}$$

Für Zufallsvariablen X, die nur auf $\mathbb{N}_0$ abbilden, gilt:

$X: \Omega \to \mathbb{N}_0$

$$\boxed{\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X=x] = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \Pr[X=i]} \qquad (1)$$

da $W_X \subseteq \mathbb{N}_0$.

Es folgt auch

Satz 2.30. Sei X eine Zufallsvariable mit $W_X \subseteq \mathbb{N}_0$. Dann gilt

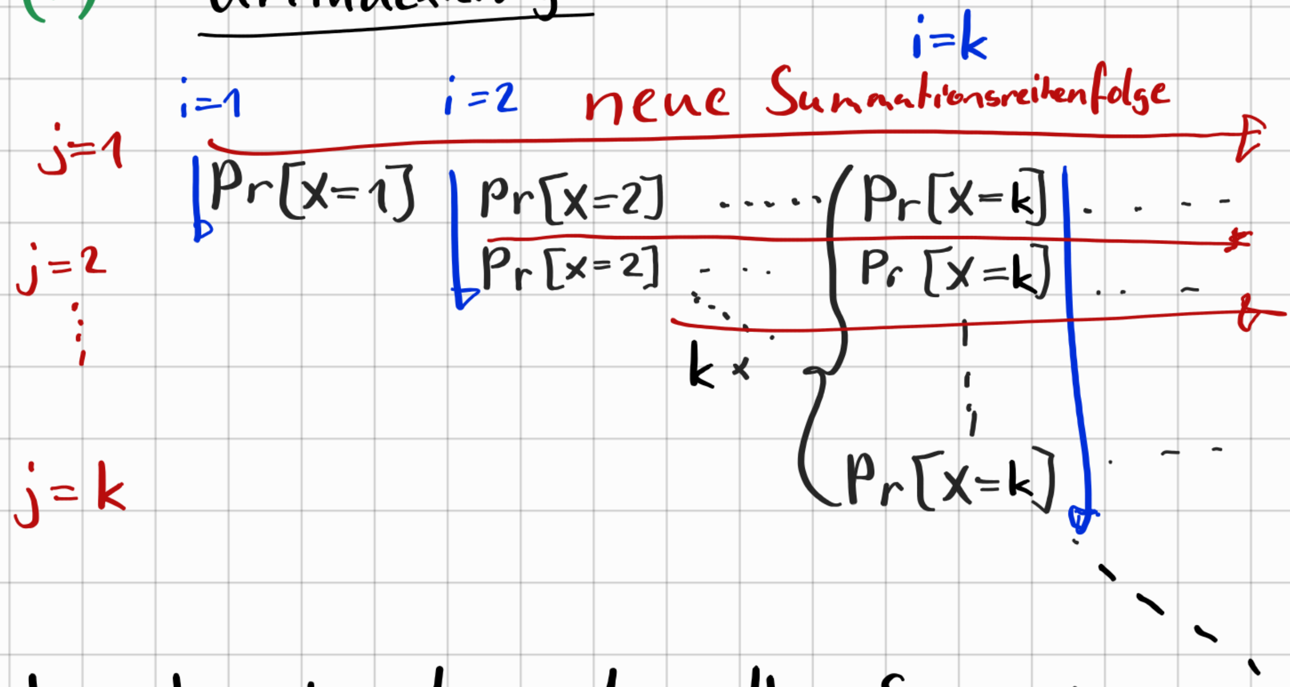
$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[X \geq i].$$

Beweis: Per (1)

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \Pr[X=i] = \boxed{\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{i} \Pr[X=i]}$$

$$\overset{(*)}{=} \boxed{\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=j}^{\infty} \Pr[X=i]} = \sum_{j=1}^{\infty} \Pr[X \geq j] \qquad \square$$

(*): <u>Umindexierung:</u>



Man bemerke, dass da alle Summanden ≥ 0 sind, die Summe absolut konvergent ist.

$\Rightarrow$ Diese Umordnung verändert demzufolge das Resultat nicht.

Linearität des Erwartungswertes

Nun kommt der wichtigste Grund, warum wir meist lieber mit einer Summe von simpleren Zufallsvariablen rechnen, als mit einer einzigen komplexeren Zufallsvariable.

Satz 2.33. *(Linearität des Erwartungswerts)* Für Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ und $X := a_1X_1 + \ldots + a_nX_n + b$ mit $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{E}[X] = a_1\mathbb{E}[X_1] + \ldots + a_n\mathbb{E}[X_n] + b.$$

<u>Beweis:</u> Per Lemma 2.29 (siehe oben)

folgt: $$\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot Pr[\omega]$$

Da $X := a_1 X_1 + \ldots + a_n X_n + b$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega \in \Omega} (a_1 X_1(\omega) + \ldots + a_n X_n(\omega) + b) \cdot Pr[\omega]$$

$$= \sum_{\omega \in \Omega} a_1 X_1(\omega) Pr[\omega] + \ldots + \sum_{\omega \in \Omega} a_n X_n(\omega) Pr[\omega] + \sum_{\omega \in \Omega} b \, Pr[\omega]$$

$$= a_1 \cdot \mathbb{E}[X_1] + \ldots + a_n \mathbb{E}[X_n] + b \cdot 1$$

$\square$

Die Linearität gilt in jedem Fall. Ob $X_1, \ldots, X_n$ abhängig oder unabhängig sind, spielt keine Rolle!

Deswegen ist diese Eigenschaft so interessant!

Indikatorvariablen

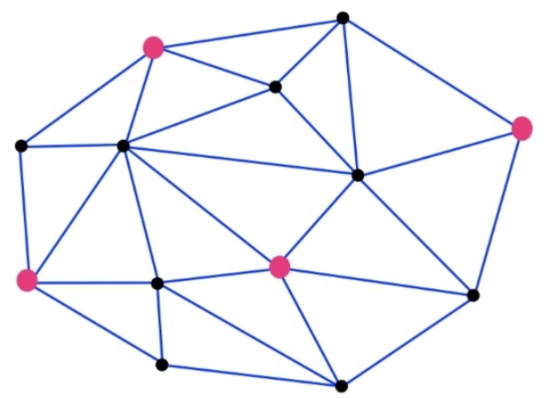
Beobachtung 2.35. Für ein Ereignis $A \subseteq \Omega$ ist die zugehörige *Indikatorvariable* X_A definiert durch:

$$X_A(\omega) := \begin{cases} 1, & \text{falls } \omega \in A \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für den Erwartungswert von X_A gilt: $\mathbb{E}[X_A] = \Pr[A]$.

Eine kompliziertere Zufallsvariable als Summe von mehreren einfacheren Indikatorvariablen darzustellen, lässt komplexe Probleme plötzlich einfach erscheinen.

Beispiel: Stabile Mengen



stabile Menge $\triangleq$ Knoten, die nicht durch Kanten verbunden sind

Formal:

$S \subseteq V$ ist stabil
$\Leftrightarrow$
$G[S]$ enthält keine Kanten

Randomisierter Algorithmus mit 2 Schritten.

1. Für jeden Knoten $v \in V$, fügen wir ihn mit Wahrscheinlichkeit p zu S hinzu.

2. Für alle Kanten noch in $G[S]$ entfernen wir einen der beiden Knoten aus S.

Sei $X_v =$ "$v \in S$ nach dem 1. Schritt" eine Indikatorvariable für alle $v \in V$ und $X = \sum_{v \in V} X_v$. ($X =$ "Knoten in S nach 1. Schritt")

Für eine beliebige Kante $e = \{u,v\} \in E$, definieren wir eine Indikatorvariable

$$Y_e = \begin{cases} 1 & \text{if } X_u = X_v = 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

Sei also $Y = \sum_{e \in E} Y_e$ die Anzahl Kanten in $G[S]$ nach dem 1. Schritt.

Sei $T =$ "Anzahl Knoten in S nach beiden Schritten".

$$T \geq X - Y \implies \mathbb{E}[T] \geq \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[Y]$$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{v \in V} \mathbb{E}[X_v] = \sum_{v \in V} p = n \cdot p$$

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{e \in E} \mathbb{E}[Y_e] = \sum_{e \in E} p^2 = m \cdot p^2$$

$$\Longrightarrow \mathbb{E}[S] \geq f(p) := np - mp^2$$

$$f'(p) = n - 2mp$$

$$f'(p) = 0 \text{ für } p = \frac{n}{2m}$$

Da $f''(p) = -2m < 0$ hat $f(p)$ ein Maximum für $p = \frac{n}{2m}$.

$$\Longrightarrow \mathbb{E}[S] \geq \frac{n^2}{2m} - \frac{\cancel{m}\, n^2}{4m^{\cancel{2}}} = \frac{2n^2 - n^2}{4m} = \frac{n^2}{4m}$$

$$\left(\text{für } p = \frac{n}{2m}\right)$$

Wenn G d-regulär $\left(m = n \cdot \frac{d}{2}\right)$

$$\mathbb{E}[S] \geq \frac{n^2}{4 \cdot n \cdot \frac{d}{2}} = \frac{n}{2d}$$

Bemerkung: $\mathrm{Var}[X \cdot Y] \neq \mathrm{Var}[X] \cdot \mathrm{Var}[Y]$ im Allg.

Verteilungen

Zur Erinnerung: Für eine Zufallsvariable $X: \Omega \to \mathbb{R}$:

Dichtefunktion: $f_X(k) = \Pr[X = k]$

Verteilungsfunktion: $F_X(k) = \Pr[X \leq k]$

$$\boxed{X \sim \text{Bernoulli}(p)}$$

$$f_X(k) = \begin{cases} p & \text{für } k = 1 \\ 1-p & \text{für } k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \Pr[X = 1] = p \\ \Pr[X = 0] = 1-p \end{array}$$

$$\mathbb{E}[X] = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}[X] &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \\ &= (1^2 \cdot p + 0^2 \cdot (1-p)) - p^2 \\ &= p - p^2 = p(1-p) \end{aligned}$$

Intuition: Eine binomialverteilte Zufallsvariable ist eine Summe von n unabhängigen bernoulliverteilten Zufallsvariablen mit gleicher W'keit p.

$$\boxed{X \sim \mathrm{Bin}(n,p)} \sim \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Ber}(p)$$

$$f_X(k) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k} & 0 \leq k \leq n,\ k \in \mathbb{N}_0 \quad \Pr[X=k] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\underbrace{\Pr[X=k] = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}}_{0 \leq k \leq n,\ k \in \mathbb{N}_0}$$

(Note that $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ mit $X_i \sim \mathrm{Ber}(p)\ \forall i \in \{1, \dots, n\}$)

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = np$$

per Linearität des Erwartungswertes.

$$\mathrm{Var}[X] = \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \overset{X_i \text{ unabhängig}}{=} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) = np(1-p)$$

$$\boxed{X \sim Po(\lambda)}$$

$$f_X(i) = \begin{cases} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^i}{i!} & \text{für } i \in \mathbb{N}_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad Pr[X=i]$$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in W_X} x \, Pr[X=x]$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} i \, Pr[X=i]$$

$\mathbb{E}[X] = \lambda$

↓

Herleitung

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \overbrace{e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^i}{i!}}^{Pr[X=i]} \qquad (\text{da } W_X \subseteq \mathbb{N}_0)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^i}{i!}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^i}{(i-1)!} = \underline{e^{-\lambda}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{k!}$$

$$= \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda}$$

$$= \underline{\underline{\lambda}}$$

Potenzreihenentwicklung von e^x. Siehe Analysis.

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

$$= \mathbb{E}(X^2) - \lambda^2$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} i^2 \, Pr[X=i] - \lambda^2 \qquad (\text{da } W_X \subseteq \mathbb{N}_0)$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} i^2 \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^i}{i!} - \lambda^2$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{(i-1)!} - \lambda^2$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{(i-1)!} - \lambda^2$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)\, e^{-\lambda} \frac{\lambda^{i+1}}{i!} - \lambda^2$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \lambda \cdot i\, e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} + \lambda e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} - \lambda^2$$

$$= \lambda \cdot \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} i \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}} + \underline{\lambda}\, e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!}} - \lambda^2$$

$$= \lambda \cdot \mathbb{E}(X) + \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} - \lambda^2$$

Potenzreihenentwl. v. e^{λ}

$$= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

$\mathrm{Bin}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right) \longrightarrow \mathrm{Po}(\lambda)$

für $n \to \infty$

$$\boxed{X \sim Geo(p)}$$

Intuition: Wir versuchen etwas mit Erfolgswahrscheinlichkeit p so lange bis wir Erfolg haben.

$$f_X(i) = \begin{cases} p(1-p)^{i-1} & \text{für } i \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad Pr[X=i]$$

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p}$$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot Pr[X=i] = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot Pr[X=i]$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot p \cdot (1-p)^{i-1} = p \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial p}\left(-(1-p)^i\right)$$
$$= (-p) \cdot \frac{\partial}{\partial p}\left(\sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^i\right) = (-p) \cdot \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{p}\right)$$
$$= (-p) \cdot \left(-\frac{1}{p^2}\right) = \frac{1}{p}$$

Alternatively:
$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \overbrace{p \cdot (1-p)^{i-1}}^{Pr[X=i]} = \sum_{i=0}^{\infty} (i+1) \cdot p \cdot (1-p)^i$$
$$= \underline{\sum_{i=0}^{\infty} i \cdot p \cdot (1-p)^i} + \sum_{i=1}^{\infty} p(1-p)^{i-1}$$
$$= (1-p) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot p \cdot (1-p)^{i-1} + \sum_{i=1}^{\infty} Pr[X=i]$$
$$= (1-p)\, \mathbb{E}[X] + 1$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}[X] - (1-p)\,\mathbb{E}[X] = 1$$

$$\Rightarrow \quad p\,\mathbb{E}[X] = 1$$

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p}$$

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} i^2 \cdot p \cdot (1-p)^{i-1} - \mathbb{E}(X)^2$$

$$= p \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} (i+1)\, i\, (1-p)^{i-1} - i\,(1-p)^{i-1} \right) - \mathbb{E}(X)^2$$

$$= p \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta^2}{\delta p^2}\left((1-p)^{i+1}\right) + \frac{\delta}{\delta p}\left((1-p)^{i}\right) \right) - \mathbb{E}(X)^2$$

$$= p \cdot \left(\frac{\delta^2}{\delta p^2}\left(\sum_{i=1}^{\infty} (1-p)^{i+1}\right) + \frac{\delta}{\delta p}\left(\sum_{i=1}^{\infty} (1-p)^{i}\right) \right) - \mathbb{E}(X)^2$$

$$= p \cdot \left(\frac{\delta^2}{\delta p^2}\left(\sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^{i+2}\right) + \frac{\delta}{\delta p}\left(\sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^{i+1}\right) \right) - \frac{1}{p^2}$$

$$= p \cdot \left(\frac{\delta^2}{\delta p^2} (1-p)^2 \cdot \frac{1}{p} + \frac{\delta}{\delta p} (1-p) \cdot \frac{1}{p} \right) - \frac{1}{p^2}$$

$$= p \left(\frac{\delta^2}{\delta p^2} \left(\frac{1-2p+p^2}{p} \right) + \frac{\delta}{\delta p} \left(\frac{1}{p} - 1 \right) \right) - \frac{1}{p^2}$$

$$= p \left(\frac{2}{p^3} - 0 + 0 - \frac{1}{p^2} - 0 \right) - \frac{1}{p^2}$$

$$= \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \boxed{\frac{1-p}{p^2}}$$

Gedächtnislosigkeit der geometrischen Verteilung:

Satz 2.45. Ist $X \sim \mathrm{Geo}(p)$, so gilt für alle $s, t \in \mathbb{N}$:

$$\Pr[X \geq s + t \mid X > s] = \Pr[X \geq t].$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}[X] - (1-p)\,\mathbb{E}[X] = 1$$

$$\Rightarrow \quad p\,\mathbb{E}[X] = 1$$

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p}$$

Übung

Aufgabe 1 – *Verteilungen*

(a) Alice und Bob werfen abwechselnd eine Münze. Wer zuerst "Kopf" wirft, gewinnt. Da Alice anfängt, darf Bob eine gezinkte Münze nehmen, die mit Wahrscheinlichkeit $1/2 \leq p \leq 1$ "Kopf" zeigt. Die Münze von Alice ist hingegen fair. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass Alice gewinnt? Kann man p so wählen, dass das Spiel fair wird?

(b) Sei $X \sim \texttt{Bin}(n, 2/n)$ eine Binomial-verteilte Zufallsvariable.

(i) Berechnen Sie $\Pr[X = 3]$ für $n = 5, 10, 50, 100, 500$.

(ii) Sei $X' \sim \texttt{Poi}(\lambda)$. Wie müssen Sie λ wählen, so dass X und X' annähernd gleich verteilt sind (für $n \to \infty$)? Berechnen Sie $\Pr[X' = 3]$ für dieses spezielle λ.